XIX Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 12 октября 2008.

Второй тур. Лига тактик

1. Среди чисел $1, 2, \ldots, 2n$ выбрали n чисел так, что никакие два выбранных числа не дают в сумме $2n+1$. Оказалось, что сумма выбранных чисел равна $\frac{n(2n+1)}{2}$. Найдите сумму их квадратов.

2. В треугольнике ABC сторона AB больше AC. На продожении стороны AB за точку A выбрана точка P такая, что $AP + PC = AB$. Отрезок AM — медиана треугольника ABC, точка Q на AB такова, что $CQ \perp AM$. Докажите, что $BQ = 2AP$.

3. В клетках таблицы 8×8 написаны $+1$ и -1 так, что в любом квадрате 2×2 сумма написанных чисел равна 2 или -2. Докажите, что есть две строки, в которых написаны одинаковые числа.

4. Положительные числа a, b и c таковы, что $ab + bc + ac{=}1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geqslant \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{c+a}.$$

5. Пусть в графе 2009 вершин, из которых 2008 имеют степень 200 и одна вершина степень 2. Докажите, что ребра этого графа нельзя раскрасить в 200 цветов так, чтобы одноцветные ребра не имели общих концов.

6. Одна из общих внешних касательных к непересекающимся окружностям S_1 и S_2 касается их в точках A и B соответственно, а вторая — в точках C и D соответственно. Пусть точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно. Прямые NA и NB пересекают эти окружности в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые CP, DQ и MN пересекаются в одной точке.

7. Найдите все целые числа a и b для которых $b^2+ab+a+b-1$ делится на a^2+ab+1.

8. Какое наибольшее количество последовательных целых чисел может представляться в виде $x^3 + 2y^2$ с целыми x и y?

9. Внутри тетраэдра $ABCD$ объема V выбрана точка P. Обозначим через S_A площадь грани BCD и аналогично определим S_B, S_C и S_D. Докажите, что $AP \cdot S_A + BP \cdot S_B + CP \cdot S_C + DP \cdot S_D \geqslant 9V$.

10. Докажите, что вещественные числа a, b и c вещественные числа. Докажите, что $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b+c}$ тогда и только тогда $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$.

XIX Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 12 октября 2008.

Второй тур. Лига тактик

1. Среди чисел $1, 2, \ldots, 2n$ выбрали n чисел так, что никакие два выбранных числа не дают в сумме $2n+1$. Оказалось, что сумма выбранных чисел равна $\frac{n(2n+1)}{2}$. Найдите сумму их квадратов.

2. В треугольнике ABC сторона AB больше AC. На продожении стороны AB за точку A выбрана точка P такая, что $AP + PC = AB$. Отрезок AM — медиана треугольника ABC, точка Q на AB такова, что $CQ \perp AM$. Докажите, что $BQ = 2AP$.

3. В клетках таблицы 8×8 написаны $+1$ и -1 так, что в любом квадрате 2×2 сумма написанных чисел равна 2 или -2. Докажите, что есть две строки, в которых написаны одинаковые числа.

4. Положительные числа a, b и c таковы, что $ab + bc + ac{=}1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geqslant \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{c+a}.$$

5. Пусть в графе 2009 вершин, из которых 2008 имеют степень 200 и одна вершина степень 2. Докажите, что ребра этого графа нельзя раскрасить в 200 цветов так, чтобы одноцветные ребра не имели общих концов.

6. Одна из общих внешних касательных к непересекающимся окружностям S_1 и S_2 касается их в точках A и B соответственно, а вторая — в точках C и D соответственно. Пусть точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно. Прямые NA и NB пересекают эти окружности в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые CP, DQ и MN пересекаются в одной точке.

7. Найдите все целые числа a и b для которых $b^2+ab+a+b-1$ делится на a^2+ab+1.

8. Какое наибольшее количество последовательных целых чисел может представляться в виде $x^3 + 2y^2$ с целыми x и y?

9. Внутри тетраэдра $ABCD$ объема V выбрана точка P. Обозначим через S_A площадь грани BCD и аналогично определим S_B, S_C и S_D. Докажите, что $AP \cdot S_A + BP \cdot S_B + CP \cdot S_C + DP \cdot S_D \geqslant 9V$.

10. Докажите, что вещественные числа a, b и c вещественные числа. Докажите, что $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b+c}$ тогда и только тогда $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$.